Extenseurs hamiltoniens minimaux

M.-C. Costa[1], D. de Werra[2], Christophe Picouleau[3]

[1] Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées Paris-Tech, laboratoire CEDRIC, Paris
marie-christine.costa@ensta-paristech.fr

[2] Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne (Suisse)
dominique.dewerra@epfl.ch

[3] Conservatoire National des Arts et Métiers, laboratoire CEDRIC, Paris
christophe.picouleau@cnam.fr

Mots-clés : 2-*facteur, cycle hamiltonien, extenseur.*

1 Introduction et motivations

Nous considérons des graphes simples finis sans boucle non orientés. Dans un graphe $G = (V, E)$ avec $|V| = n$ sommets et $|E| = m$ arêtes, une arête est notée xy. Si deux sommets x, y ne sont pas reliés par une arête la paire de sommets forme la non-arête $xy, xy \notin E$. Dans G un 2-facteur est un ensemble d'arêtes $F \subset E$ tel que chaque sommet de G est incident à exactement deux arêtes de F. Ainsi un 2-facteur consiste en une collection de cycles disjoints. Si la collection consiste en un unique cycle le 2-facteur est connexe et le cycle est hamiltonien.

Notre objectif est de déterminer, pour tout entier $n \geq 3$, un graphe $G = (V, E), n = |V|$ avec un nombre minimal d'arêtes tel que pour toute non-arête xy il est possible d'inclure xy dans un 2-facteur connexe, i.e., le graphe $G_{xy} = (V, E \cup \{xy\})$ contient un cycle hamiltonien $H, xy \in H$.

Définition 1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $xy \notin E$ une non-arête. Si $G_{xy} = (V, E \cup \{xy\})$ a un cycle hamitonien contenant xy nous dirons que xy a été étendue (à un 2-facteur connexe, ou à un cycle hamiltonien).*

Définition 2 *Un graphe $G = (V, E)$ est un extenseur si chaque non-arête $xy \notin E$ peut ête étendue.*

Définition 3 *Un extenseur $G = (V, E)$ avec $|V| = n$ et un nombre minimal d'arêtes est un extenseur minimum. Sa cardinalité $|E|$ est noté $Exp_h(n)$.*

Le cas où les 2-facteurs ne sont pas contraints à être connexes a été étudié dans [3]. Dans ce contexte $Exp(n)$ est le nombre minimal d'arêtes pour qu'un graphe avec n sommets soit 2-facteur extensible. Notons que $Exp_h(n) \geq Exp(n)$.

Nous montrerons que :

Proposition 1 $Exp_h(3) = 2, Exp_h(4) = 4, Exp_h(5) = 6$;
$Exp_h(n) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil, n \geq 6.$

Nous donnerons les constructions permettant d'obtenir un extenseur minimum pour tout $n \geq 3$.

A titre d'illustration la figure suivante donne des extenseurs minimaux pour $n = 7, n = 10, n = 11$.

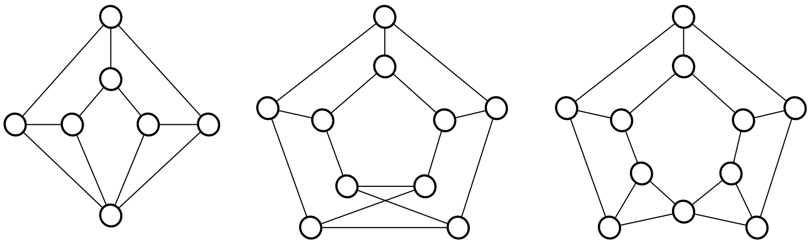

FIG. 1 – Trois extenseurs hamiltoniens minimaux.

Références

[1] J.A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer, (2008).

[2] M.-C. Costa, D. de Werra, C. Picouleau, *Minimal graphs for matching extensions*, Discrete Applied Mathematics, Available online.

[3] M.-C. Costa, D. de Werra, C. Picouleau, *Minimal graphs for* 2*-factor extension*, submitted.